OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE – ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VIII-a 16.03.2024

Problema 1. (7 puncte)

a) Arătați că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, pentru orice a,b, numere reale nenule, pozitive.

b) Demonstrați că $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>6$.

Soluție:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \forall a,b>0 \Rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$ ....(2p)

$a^2-2ab+b^2\geq 0 \;\Rightarrow\; (a-b)^2\geq 0, \forall a,b>0$ ....(1p)

b)

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \forall a,b>0, \qquad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2 \Leftrightarrow a=b$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}>2$ ....(1p)

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}>2$ ....(1p)

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>2$ ....(1p)

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}>6$ ....(1p)

Problema 2. (7 puncte)

Se consideră expresia : $E(x)=\left(\frac{x-6}{x^2-25}+\frac{x}{5-x}-\frac{2x}{x^2+4x-5}:\frac{x^2+x}{1-x^2}+\frac{x^2-x-2}{x^2+6x+5}\right):\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5;\ -\frac{2}{3};\ -1;0;\ 1;\ 5\right\}$

a) Arătați că $E(x)=-\frac{3}{x-1}$.

b) Arătați ca suma soluțiilor întregi ale inecuației $\left|\frac{3}{E(x)}\right|\leq 5$ este număr natural par.

Soluție:

a) $E=\left(\frac{x-6}{(x-5)(x+5)}-\frac{x}{x-5}+\frac{2}{x+5}+\frac{(x-2)(x+1)}{(x+5)(x+1)}\right):\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$ ....(1p)

$E(x)=\left(\frac{-9x-6}{x^2-25}\right):\frac{(3x+2)(x-1)}{x^2-25}$ ....(1p)

$E(x)=\left(\frac{-3(3x+2)}{x^2-25}\right)\cdot\frac{x^2-25}{(3x+2)(x-1)}$ ....(1p)

$E(x)=-\frac{3}{x-1}$ unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5;\ -\frac{2}{3};-1;0;\ 1;\ 5\right\}$ ....(1p)

b) $\left|\frac{3}{E(x)}\right|\leq 5 \;\Leftrightarrow |-x+1|\leq 5$ ....(1p)

$-4\leq x\leq 6\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-5;\ -\frac{2}{3};\ -1;0;\ 1;\ 5\right\}$ ....(1p)

$S=6$ număr natural par....................(1p)

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”

Anton Pann

Felicitări!

Problema 3. (7 puncte)

Fie pătratul $ABCD$ cu latura de 8 cm, punctele E, F, G, H aparțin laturilor AB, BC, CD respectiv DA astfel încât $AE = BF = CG = DH = \frac{3}{4} \cdot AB$. Pe planul pătratului se ridică perpendiculara $AQ = 4{,}8\ cm$.

a) Arătați că $EFGH$ este pătrat.
b) Arătați că $AF \perp GB$.
c) Determinați distanța de la punctul Q la dreapta BG.

Soluție:

a) $\Delta AHE \equiv \Delta BEF \equiv \Delta CFG \equiv \Delta DGH \Rightarrow HE = EF = GF = HG \Longrightarrow EFGH$ este romb................................**(1p)**

$\sphericalangle AHE + \sphericalangle AEH = 90^0, \sphericalangle AHE \equiv \sphericalangle FEB \Longrightarrow HEF = 90^0 \Longrightarrow EFGH$ este pătrat...................................... **(1p)**

b) $\Delta ABF \equiv \Delta BCG \Longrightarrow \sphericalangle FAB = \sphericalangle GBC, \sphericalangle FAB + \sphericalangle AFB = 90^0 \Longrightarrow \sphericalangle FTB = 90^0$ .... **(1p)**

$\{T\} = AF \cap BG \Longrightarrow AF \perp GB$.. **(1p)**

c) Aplicăm teorema celor trei perpendiculare $\Longrightarrow QT \perp GB \Longrightarrow d(Q, GB) = QT$..**(2p)**
Aplicăm teorema catetei în triunghiul dreptunghic $\Delta ABF \Longrightarrow AT = 6{,}4\ cm$

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\Delta QAT \Longrightarrow QT = 8\ cm$ .... **(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are înălțimea egală cu $8\sqrt{3}\ cm$ și aria triunghiului ΔOAB egală cu $16\sqrt{3}\ cm^2$, unde $\{O\} = BA' \cap AB'$.

a) Arătați că latura bazei este egală 8 cm.
b) Arătați că $OE \parallel$ (ABC), unde E este mijlocul lui CC'.
c) Determinați măsura unghiului format de planele (BA'E) și (ABC).

Soluție:

a) $A_{ABB'A'} = 4 \cdot 16\sqrt{3} = 64\sqrt{3}\ cm^2$.. **(1p)**

$AB = 8\ cm$ ....**(1p)**

b) Fie $\{F\} = A'E \cap AC$

$$\left.\begin{array}{r} EC \parallel AA', EC = \frac{AA'}{2} \Rightarrow CE \text{ linie mijlocie} \Rightarrow E \text{ mijlocul segmentului } A'F \\ O \text{ mijlocul segmentului } A'B \end{array}\right\} \Rightarrow OE \parallel BF$$ .... **(1p)**

$$\left.\begin{array}{r} OE \parallel BF \\ BF \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow OE \parallel (ABC)$$ .... **(1p)**

c) $(A'BE) \cap (ABC) = BF, EC \parallel AA', EC = \frac{AA'}{2} \Longrightarrow CA = CF = BC \Longrightarrow \Delta ABF\ dreptunghic$ în B.............**(1p)**

$$\left.\begin{array}{r} (A'BE) \cap (ABC) = BF \\ A'B \perp BF,\ A'B \subset (A'BE) \\ AB \perp BF,\ AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle((A'BE),(ABC)) \Rightarrow \sphericalangle(ABA')$$ ....**(1p)**

$\Delta ABA'$ dreptunghic în $A \Longrightarrow \sphericalangle(ABA') = 60°$..**(1p)**

Metoda 2 pentru punctele a și b

Sau a) $A_{\Delta AOB} = \frac{OM \cdot AB}{2}, OM \perp AB$ ....**(1p)**

$AB = \frac{2 \cdot 16\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 8\ cm$..**(1p)**

b) $OM \parallel EC, OM = EC \Rightarrow OMCE$ paralelogram ....**(1p)**
$OE \parallel MC, MC \subset (ABC) \Rightarrow OE \parallel (ABC)$ ....**(1p)**

„Binele ce-l faci la oarecine, ți-l întoarce vremea care vine”
Anton Pann

Felicitări!