OLIMPIADA DE MATEMATICĂ A SATELOR DIN ROMÂNIA

BAREM CORECTARE - ETAPA JUDEȚEANĂ

CLASA a VII-a 7.03.2025

Problema 1. (7 puncte)

Se consideră numărul $a = \frac{1}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{9}{20} + \ldots + \frac{25}{100} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{20}\right)$.

a) Arătaţi că numărul *a* este pătrat perfect.

b) Aflați numărul întreg *n*, știind că $\frac{a}{2n-1} \in \mathbb{Z}$.

Soluție.

a) $a = \frac{1}{5} + \frac{2+5}{2\cdot5} + \frac{3+5}{3\cdot5} + \frac{4+5}{4\cdot5} + \cdots + \frac{20+5}{20\cdot5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{20}\right) =$..................**(1p)**

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{2\cdot5} + \frac{5}{2\cdot5} + \frac{3}{3\cdot5} + \frac{5}{3\cdot5} + \ldots + \frac{20}{20\cdot5} + \frac{5}{20\cdot5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{20}\right) =$..............**(1p)**

$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{20}\right) =$........................**(1p)**

$= \frac{1}{5} \cdot 20 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{20} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{20}\right) = 4$, deci *a* este pătrat perfect....**(1p)**

b) $\frac{a}{2n-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2n-1 \mid 4$..**(1p)**

$2n-1 \in \{-4,-2,-1,1,2,4\}$ și $n \in Z \Rightarrow n \in \{0,1\}$..............................**(2p)**

Problema 2. (7 puncte)

a) Se consideră numerele $x = 169$ și $y = 289$. Arătaţi că $\frac{\sqrt{x\cdot y}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$.

b) Arătați că, pentru orice număr natural *n*, $\frac{\sqrt{x\cdot y}+2025^{2n+1}+(-2025)^{2n+1}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$, oricare ar fi numerele reale pozitive *x* și *y*.

Soluție.

a) $\frac{\sqrt{x\cdot y}}{x+y} = \frac{13\cdot17}{458} = \frac{221}{458}$; $\frac{221}{458} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 442 \leq 458$, ceea ce este adevărat..............**(2p)**

b) Obs. că $2025^{2n+1} + (-2025)^{2n+1} = 0$...**(1p)**

Folosim inegalitatea mediilor: $m_g \leq m_a \Leftrightarrow \sqrt{x\cdot y} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow$....................**(1p)**

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x\cdot y}}{x+y} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x\cdot y}+2025^{2n+1}+(-2025)^{2n+1}}{x+y} \leq \frac{1}{2}$.......................................**(3p)**

Problema 3. (7 puncte)

Trapezul isoscel *ABCD* ($AB \parallel CD, AB < CD$, $AC \cap BD = \{O\}$) are diagonalele perpendiculare. Fie *M*, *N*, *P*, *Q* mijloacele laturilor *AB*, *BC*, *CD*, respectiv *DA*.

a) Arătați că $MP = \frac{AB+CD}{2}$.

b) Arătați că $NQ < \frac{AD+BC}{2}$.

Soluție.

a) Figura corectă ……………………………………………………..............................**(1p)**

În triunghiul dreptunghic isoscel *AOB*, *OM* este mediană și înălțime,

deci $OM = \frac{AB}{2}$. Analog, în triunghiul dreptunghic isoscel *COD*, $OP = \frac{CD}{2}$.....**(1p)**

Cum punctele *M, O, N* sunt coliniare, rezultă că $MP = OM + OP = \frac{AB+CD}{2}$...**(1p)**

b) În triunghiul dreptunghic *AOD*, *OQ* este mediană, deci $OQ = \frac{AD}{2}$. Analog, în triunghiul dreptunghic *BOC*, $ON = \frac{BC}{2}$……………………..………………......…**(2p)**

În triunghiul *ONQ*, $NQ < OQ + ON$ ………………………………….……….…..**(1p)**

Rezultă că $NQ < \frac{AD+BC}{2}$………………………………..……………………..…**(1p)**

Problema 4. (7 puncte)

Fie *ABCD* un dreptunghi, $AB > BC$. Pe latura *CD* se consideră punctul *E*, astfel încât $CE = 2DE = 2AD$.

Dacă $AC \cap BE = \{F\}$, calculați măsura unghiului *AFE*.

Soluție.

Figura corectă …………………………..………………………..……..…....**(1p)**

$CE = 2DE = 2AD$, rezultă că $DE = AD$ ………………………….…………**(1p)**

Prelungim *DA* cu *AG*, *AG* = *AD*. Rezultă că *GD* = *EC*………………………**(1p)**

GA = *BC*, $GA \parallel BC \Longrightarrow AGBC$ este paralelogram……………………….……**(1p)**

Fie ΔGDE și ΔECB: $GD = EC, DE = BC, \sphericalangle D = \sphericalangle C = 90° \overset{CC}{\Rightarrow}$

$\Delta GDE \equiv \Delta ECB \Rightarrow GE = EB$ ……...…**(1p)**

În ΔGDE: $\sphericalangle DGE + \sphericalangle DEG = 90° \Rightarrow \sphericalangle BEC + \sphericalangle DEG = 90° \Rightarrow$

$\sphericalangle BEG = 90° \Rightarrow \Delta BEG$ este drept. is.…………………………………….....…**(1p)**

Rezultă că $\sphericalangle GBE = 45° \Rightarrow \sphericalangle AFE = 45°$ (corespondente)………………… **(1p)**